TD6

APPLICATIONS LINÉAIRES.

Exercice 1 D'après **EML** 1999.

On considère les éléments suivants de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $u = (1, -\sqrt{2}, 1)$, $v = (-1, 0, 1)$ et $w = (1, \sqrt{2}, 1)$.

1. Montrer que (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Justifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
3. Montrer que la matrice $P^{-1}JP$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.
4. Calculer J^2 et exprimer J^2 en fonction de I et K. En déduire que $P^{-1}KP$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.
5. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère l'élément suivant de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & am + c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$
   a. Montrer que M s'exprime simplement à l'aide de I, J, K et a, b, c.
   b. En déduire que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.
6. Trouver une matrice X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 D'après **EDHEC** 2006.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. **a.** Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u)$.
   b. La matrice A est-elle inversible ?
2. **a.** Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la 2ème coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1 et tel que $f(v) = u$.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

b. Démontrer que le vecteur w, dont la 2ème coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1 et qui vérifie $f(w) = v$ est le vecteur $w = (0, 1, -1)$.

c. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Expliciter la matrice P.

3. **a.** Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.

b. Donner la relation donnant la relation entre les matrices A, N, P et P^{-1}.
En déduire que pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a $A^k = 0$.

4. On note $\mathcal{C}_N$ (respectivement $\mathcal{C}_A$) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement avec A).

a. Montrer que $\mathcal{C}_N$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On admet que $\mathcal{C}_A$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $\mathcal{C}_N = \text{Vect}(I, N, N^2)$.

c. Établir que $M \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{C}_N$.
En déduire que $\mathcal{C}_A = \text{Vect}(I, A, A^2)$.
Quelle est la dimension de $\mathcal{C}_A$?

Exercice 3 D'après **ESSEC** 2007 - Maths 3.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0 \quad \text{et} \quad w_0 = 0,$$

et les relations de récurrence

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n + 2v_n \\ w_{n+1} &= v_n + w_n \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Enfin, on note A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Reconnaître, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le produit AX_n.

b. En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.

2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

a. Déterminer une base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans cette base vérifie

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

et que les vecteurs e'_1, e'_2 et e'_3 aient respectivement pour troisième composante 1, -1 et 2.
On notera dorénavant $\mathcal{B}'$ la base (e'_1, e'_2, e'_3).

b. À l'aide de la formule du binôme et de la décomposition suivante de T,

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$ [1]

1. Cette terminologie sera expliquée dans le troisième et dernier chapitre d'algèbre linéaire.

a. Exprimer A en fonction des matrices T, P et P^{-1}, puis A^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier n.

b. Calculer P^{-1}.

c. Déterminer les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 4

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On considère l'application Φ définie par

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \Phi(f) \end{array}$$

où $\Phi(f)$ est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Φ est-il injectif ? surjectif ?
3. Quelle remarque la précédente question inspire-t-elle ?